إذا كانت لدينا الشجرة الثنائية التالية عندئذ يمكن تمثيل الرسالة وكلمة الشيفرة من خلال الجدول التالي

Latter	a	b	c	d	e	F	g
codeword	000	0010	0011	0101	011	100	101

٣- (١٥) -

خوارزمية هوفمان: تستخدم من أجل الحصول على أفضل طريقة لتمثيل مجموعة من الرموز باستخدام الأشجار الثنائية

المعطيات: مجموعة من الرموز $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ وأوزانها $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

المخرجات: الوصول إلى شجرة ثنائية تمثل الشيفرة المصدرية للرموز مع عبارة شيفرة ذات أقل وزن أو طول

خطوات الخوارزمية: ① في البداية غابة F مكونة من الرؤوس $S_1, S_2, \dots, S_n$ مع الأوزان $w_1, w_2, \dots, w_n$

② من $i=1$ إلى $i=n-1$ (عدد الرؤوس) كرر

أ- اختر من F شجرتين (أو رأسين أو رمزين) بأقل وزن ممكن من F

ب- ابنِ شجرة ثنائية جديدة بحيث يكون T_1 الشجرة الجزئية اليسرى، T_2 الشجرة الجزئية اليمنى

ج- ضع وزن 0 إلى الضلع المتجه إلى T_1 اليسار ووزن 1 إلى الضلع المتجه لليمين إلى T_2

د- أعط للشجرة الجديدة الوزن $w(T) = w(T_1) + w(T_2)$

هـ- استبدل الأشجار T_1, T_2 في الغابة F بشجرة جديدة T

③ عندما تصبح F شجرة (غابة مكونة من مركبة واحدة) تكون هي الشجرة الثنائية المطلوبة.

مثال: استخدم خوارزمية هوفمان من أجل الحصول على شيفرة مصدرية للرموز المرفقة مع الأوزان (نسب التكرار) الموضحة في الجدول التالي.

الرمز Letter	a	b	c	d	e	f	g
freqen نسب التكرار الوزن	0.2	0.05	0.1	0.1	0.25	0.15	0.15

الحل:

① نضع غابة F مكونة من الرؤوس المرفقة مع أوزانها

② من i=1 إلى n-1=7-1=6 كرر

أ- نختار شجرتين ذواتَي أقل رمز ممكن $T_1 = b$ ، $T_2 = c$ ونشكل شجرة لهما b، c حيث الشجرة الجزئية اليسرى $T_1 = b$ ، $T_2 = c$ هاتين الشجرتين تشكلان شجرة يتم إعطاء الرقم 0 لـ T_1 وإعطاء الرقم 1 لـ T_2 ووزنها

$W(T) = W(T_1) + W(T_2) =$

$= 0.05 + 0.1 = 0.15$

ب- من أجل i=2 نختار شجرتين ذواتَي أقل وزن ممكن لهما {b,c} ، d نضع $T_1 = \{b,c\}$ ، $T_2 = d$ وهاتين الشجرتين T_1 ، T_2 تشكلان شجرة بحيث T_1 الشجرة الجزئية اليسرى و T_2 الجزئية اليمنى ووزن هذه الشجرة $W(T_1) + W(T_2) = 0.15 + 0.1 = 0.25$

جـ- نختار شجرتين ذواتَي أقل وزن ممكن لهما $T_1 = f$ ، $T_2 = g$ ونشكل شجرة جديدة وزنها $W(T) = W(T_1) + W(T_2) = 0.15 + 0.15 = 0.3$

a (0.2)، b (0.05)، c (0.1)، d (0.1)، e (0.25)، f (0.15)، g (0.15)

a (0.2)، [b —0— (0.15) —1— c]، d (0.1)، e (0.25)، f (0.15)، g (0.15)

a (0.2)، [(b, c) —0— (0.25) —1— d]، e (0.25)، f (0.15)، g (0.15)

a (0.2)، [(b, c), d] (0.25)، e (0.25)، [f —0— (0.30) —1— g]

[a —0— (0.45) —1— ((b, c), d)]، e (0.25)، [f, g] (0.30)

[a, ((b, c), d)] (0.45)، [e —0— (0.55) —1— (f, g)]

٤ـ نختار شجرتين أو رمزين بأقل وزن ممكن هما $T_1 = a$ ، $T_2 = \{b, c, d\}$

ونرمز لهما بشجرتين جزئيتين تشتركان بشجرة وحيدة وزنها $W(T) = 0.2 + 0.25 = 0.45$ ،

ـ نختار شجرتين جزئيتين بأقل وزن ممكن وهما الشجرتين $T_1 = e$ ، $T_2 = \{f, g\}$

هاتين الشجرتين T_1 ، T_2 تشتركان بشجرة وحيدة وزنها $W(T) = 0.25 + 0.30 = 0.55$

٥ـ نختار شجرتين جزئيتين بأقل وزن ممكن وهما الشجرتين $\{e, f, g\}$ ، $\{a, b, c, d\}$

نضع $T_1 = \{a, b, c\}$ ، $T_2 = \{e, f, g\}$ هاتين الشجرتين تشتركان بشجرة واحدة وزنها

$$W(T) = W(T_1) + W(T_2) = 0.45 + 0.55 = 1$$

الشجرة الثنائية المطلوبة

(شجرة ثنائية: من الجذر فرع 0 إلى عقدة، وفرع 1 إلى عقدة؛ الأوراق: a، b، c، d، e، f، g)

هذه الشجرة الثنائية تمثل شجرة هوفمان والتي تمثل مجموعة الرموز a, b, c, d, e, f, g

وكلمة الشيفرة مع الرموز المعطاة تعطى بالجدول التالي

الرمز letter	a	b	c	d	e	f	g
الشيفرة	00	0100	0101	011	10	110	111

ومتوسط الوزن يعطى بالصيغة

$$\sum_{i=1}^{n=7} f_i w_i = 2(0.2) + 4(0.05) + 4(0.1) + 3(0.1) + 2(0.25) + 3(0.15) + 3(0.15) = 2.5$$

f عدد خانات الرموز

w وزن الرمز

خوارزمية كروسكال: ليكن $G(V,E)$ بيان مترابط وموزون (يرمز لكل رأس بقيمة).

المعطيات: $G(V,E)$ بيان مترابط موزون.

المخرجات: ايجاد شجرة القياس الصغرى $T(V, E(T))$ (رؤوس، أضلاع)

الطريقة: نختار الأضلاع التالية بأصغر وزن بحيث لا تشكل هذه الأضلاع التي تم اختيارها مع الأضلاع السابقة حلقة

خطوات الخوارزمية

① ليكن $i = 1$ ، $T = \emptyset$ (ما فيها رؤوس)

② افترض ضلع e له وزن أصغري بحيث هذا الضلع e لا ينتمي إلى $E(T)$ (ليس ضلع من الشجرة) وكذلك T مع هذا الضلع $T \cup \{e\}$ لا يحتوي على حلقة. اذا كان e غير موجود عندئذ توقف وإلا نضع $e = e_i$ لـ $i = 1, 2, \dots, n-1$ والشجرة تصبح تساوي الشجرة السابقة مع الأضلاع مضاف لها الضلع الجديد $T = T \cup \{e_i\}$

③ اذا كانت $i = p-1$ توقف وإلا $i = i+1$ ثم اذهب إلى الخطوة ②.

تمرين: لتكن لدينا البيان الموزون التالي:

المطلوب: ايجاد شجرة القياس الصغرى للبيان

$P = 8$ عدد الرؤوس

الخطوات ① $i = 1$ ، $T = \emptyset$

② نختار ضلع e بأصغر وزن حيث أن $e = v_3v_7 = 2$ هذا الضلع e لا ينتمي لـ T ماضياً $T \cup \{e\}$ لا يشكل حلقة والشجرة هي تصبح $e_1 = \{e_3, e_7\}$

$T = T \cup \{e_1\}$

$T = \{e_1\}$

- ① $i \neq p-1 = 8-1 = 7$ ⟸ $i = i+1 = 2$ انتقل للخطوة 2

نختار ضلع e بأصغر وزن $e = (v_1, v_8) = 3$ بحيث أن هذا الضلع لا ينتمي لـ T وكذلك هذا الضلع $T \cup \{e\}$ لا يشكل حلقة

$e_2 = (v_1, v_8)$

$T = T \cup \{e_2\} = \{e_1, e_2\}$

- ② $i = 2 \neq p-1 = 7$ ⟸ نزيد العداد $i = i+1 = 2+1 = 3$ نذهب للخطوة 2.

نختار الضلع بأصغر وزن $e(v_4, v_6)$

$e_3 = (v_4, v_6)$

$T = T \cup \{e_3\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

③ $i = 3 \neq p-1 = 7$ ⟸ $i = i+1 = 3+1 = 4$

أذهب للخطوة ②

نختار الضلع e بأصغر وزن

$e(v_2, v_8) = 4$ هذا الضلع لا ينتمي إلى T وكذلك $T \cup e$ لا يشكل حلقة

$e_4(v_2, v_8)$ ← الشجرة $T = T \cup \{e_4\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

- $i = 4 \neq p-1 = 7$ ومنه $i = i+1 = 4+1 = 5$ انتقل للخطوة ②

2- نختار الضلع e بأصغر وزن $e = (v_1, v_2) = 5$ لا ينتمي للشجرة T وكذلك $T \cup \{e\}$ تشكل حلقة لذلك الضلع المختار $e = (v_1, v_2)$ مرفوض

② - نختار الضلع e بأصغر وزن $e = (v_2, v_7) = 6$ مع $e \notin T$ وكذلك $T \cup \{e\}$ لا تشكل حلقة لذلك $e_5(v_2, v_7)$ والشجرة $T = T \cup \{e_5\} = \{e_1, e_2, ...\}$

$T = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

- $i = 5 \neq p-1 = 7$ ⟸ $i = i+1 = 5+1 = 6$ ومنه نذهب للخطوة ②

نختار الضلع e بأصغر وزن $e(v_2,v_3)=7$ و $T \not\ni$ $T\cup\{e\}$ تشكل حلقة

لذلك اختيار الضلع e مرفوض نكرر الخطوة ②

- نختار الضلع $e(v_5,v_6)$ $T \not\ni$ وكذلك $T\cup\{e\}$ لا تشكل حلقة لذلك نضع

$\boxed{e_6=(v_5,v_6)}$ $\quad T=T\cup\{e_6\} \Leftarrow T=\{e_1,\dots e_6\}$

⑧ - $i=6\neq p-1=7 \Leftarrow i=i+1=6+1=7$ ننتقل للخطوة ②

- نختار الضلع $e=(v_4,v_8)$ و $T\not\ni$ $T\cup\{e\}$ يشكل حلقة لذلك اختيار الضلع مرفوض

نكرر الخطوة ②

- نختار الضلع $e(v_7,v_8)=10$ و $T\not\ni$ $T\cup\{e\}$ يشكل حلقة مرفوض

نكرر الخطوة ②

نختار الضلع $e(v_4,v_7)=11$ و $T\not\ni$ $T\cup\{e\}$ لا تشكل حلقة ونضع

$e_7=\{v_4,v_7\}$ $\quad T=T\cup\{e_7\} \Leftarrow T=\{e_1,\dots,e_7\}$

⑧ - $i=7=p-1=7$ توقف.

- بالتالي تكون شجرة التماس الصغرى

$$w(T)=\sum_{i=1}^{7} e_i = 2+3+3+4+6+11+8=37$$